

گاز بوزونی در دمای دلخواه

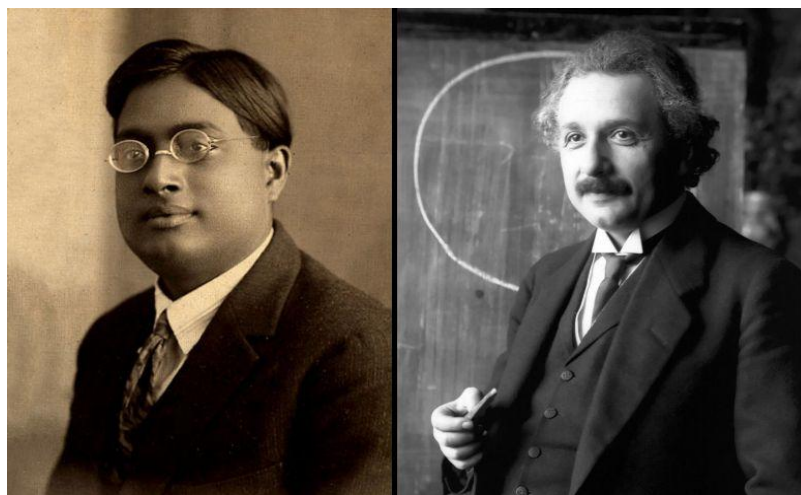
وحید کریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲۴ دی ۱۴۰۴

۱ مقدمه

ساتیندرا نات بوز،^۱ که هرگز مدرک دکتری نگرفت، ریاضی فیزیکدان هندی بود که علایق وسیعی در رشته های دیگری چون کانی شناسی، شیمی، بیولوژی، هنر، ادبیات و موسیقی داشت. وی به مقام عضویت در انجمن پادشاهی انگلستان نیز رسید و عضو چندین انجمن پژوهشی در هند پس از استقلال بود. وی همچنین با چندین زبان از جمله انگلیسی، فرانسه، آلمانی و سانسکریت آشنایی کامل داشت. مقاله اولیه بوز در سال ۱۹۲۴ یعنی ۲۴ سال بعد از کار پلانک نوشته شد و اثبات قانون پلانک برای تابش جسم سیاه به شیوه جدید بود. این شیوه جدید چیزی نیست جز شمارش حالت فوتون ها به عنوان ذرات یکسان به روش صحیحی که در درسهای گذشته دیده ایم. سهم اینشتین این بود که اهمیت کار بوز را به عنوان سرآغاز مکانیک آماری کوانتومی فهمید، کار او را به ذرات جرم دار تعمیم داد و توانست پدیده مهمی را پیش بینی کند که امروزه آن را چگالش بوز-اینشتین^۲ می نامیم. بوز در ۱۹۲۴ مقاله خود را برای اینشتین فرستاد و از او خواست که اگر آن را حاوی نتیجه ای درخور می داند، ترجمه ای از آن را برای مجله مهم آن دوران یعنی Zeitschrift fur Physik بفرستد. قسمتی از متن نامه بوز به اینشتین چنین است:

«... اگر فکر می کنید که مقاله خوبی است، ممنون خواهم شد اگر ترتیب انتشارش را در مجله Zeitschrift fur Physik بدهید. اگرچه برای شما فردی کاملاً غریبه هستم، ولی در تقاضایی اینچنینی تردیدی به خود راه نمی دهم، چرا که ما همه شاگرد شما هستیم و از نوشته های شما آموخته ایم. نمی دانم آیا شما هنوز به یاد می آورید که کسی از شهر کلکته برای ترجمه مقالات تان در نسبیت از شما اجازه گرفت



Satyendra Nath Bose (1894-1974)

Albert Einstein (1879-1955)

شکل ۱: ساتی یاندرا بوز و آلبرت آینشتین، دو فیزیکدانی که نخستین بار مکانیک آماری بوزون ها را تدوین کردند.

و شما نیز موافقت کردید. آن کتاب اکنون چاپ شده و من کسی بودم که کتاب شما را در نسبیت عام ترجمه کردم. «

Satyendra Nath Bose^۱
Bose-Einstein Condensation^۲

در درس گذشته با استفاده از روابط گاز فرمیونی ایده آل را بررسی کردیم. در این درس گاز بوزونی ایده آل را مطالعه می کنیم. برای بوزون ها نیز خواهیم دید که خاصیت کوانتومی آنها منجر به پدیده های عمیق و شگفت انگیز ماکروسکوپی خواهد شد. مهم ترین این پدیده ها چگالش بوز-اینشتین^۱ است که طی آن کسر قابل توجهی از کل ذرات یعنی تعداد ماکروسکوپی از ذرات در حالت پایه جمع یا به اصطلاح چگالیده می شوند. این پدیده در دماهای بسیار کم یا چگالی های بسیار زیاد آنها فقط برای بوزون ها رخ می دهد و منشاء پدیده هایی مثل ابرشارگی و ابرسانایی است. از نظر کیفی و به صورت خیلی ابتدایی می توان چگالش بوز-اینشتین را به این شکل توضیح داد که قبل از چگالش پخش شدن ذرات در تراز های مختلف که هرکدام تکانه و انرژی مخصوص به خود دارند باعث برخورد ها و پراکندگی ذرات از یک دیگر و در نتیجه باعث بروز مزاحمت و ویسکوزیته در مایعات و یا مقاومت الکتریکی در رساناهای معمولی می شود. ولی بعد از چگالش، جمع شدن انبوهی از ذرات در یک

^۱Bose-Einstein Condensation

حالت پایه با انرژی و تکانه معین باعث رفتار جمعی و یکسان ذرات و در نتیجه از بین رفتن گرانیروی (یا ویسکوزیته)^۲ در مایعات یا مقاومت الکتریکی در ابررساناها می شود. باید دقت کرد که در یک ابررسانا، الکترون ها دو به دو تشکیل جفت هایی موسوم به جفت های کوپر^۳ می دهند و این جفت های کوپر هستند که نهایتاً چگالیده شده و باعث ابررسانایی می شوند. به طور کیفی می توان گفت که رفتار جمعی ذرات قبل از چگالش مثل یک گاز و بعد از چگالش مثل یک مایع است. این تفاوت در تمام ویژگی های این دستگاه بس ذره ای نظیر تراکم پذیری، ظرفیت گرمایی ویژه و نظایر آن دیده می شود.

بعد از این مقدمه می توانیم به بررسی دقیق مکانیک آماری گاز بوزونی ایده آل بپردازیم. از درس های قبلی روابط کلی را یادآوری می کنیم. داریم:

$$\ln Q = - \sum_{\ell} \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_{\ell}}) \quad (۱)$$

$$N = \sum_{\ell} \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_{\ell}} - 1} \quad (۲)$$

$$U = \sum_{\ell} \frac{\epsilon_{\ell}}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_{\ell}} - 1} \quad (۳)$$

برای گاز ایده آل، ϵ_{ℓ} ها عبارتند از سطوح انرژی یک ذره درون یک چاه پتانسیل که ابعاد آن را L می گیریم. هرگاه فضایی را که ذره در آن قرار دارد یک مکعب d بعدی بگیریم و شرایط مرزی را نیز طوری بگیریم که تابع موج روی دیواره ها صفر باشد، خواهیم داشت:

$$\epsilon_{\ell} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} (l_1^2 + l_2^2 + \dots l_d^2). \quad (۴)$$

در درس قبلی دیدیم که چگونه با داشتن این انرژی می توان جمع های بالا را به انتگرال تبدیل کرد. با استفاده از تابع چگالی حالت ها بدست می آوریم:

$$\ln Q = - \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^{\infty} x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - ze^{-x}) dx. \quad (۵)$$

اما این رابطه یک اشکال اساسی دارد که اینک آن را توضیح داده و رفع می کنیم. برای راحتی با افزودن یک جمله ثابت به هامیلتونی، کاری می کنیم که انرژی حالت پایه برابر با صفر باشد. این کار هیچ تغییری در خصوصیات فیزیکی این پدیده ایجاد نمی کند. بنابراین قرار می دهیم

^۲Viscosity
^۳Cooper Pairs

$\epsilon_0 = 0$ که در اثر آن محدوده پارامتر z این خواهد بود:

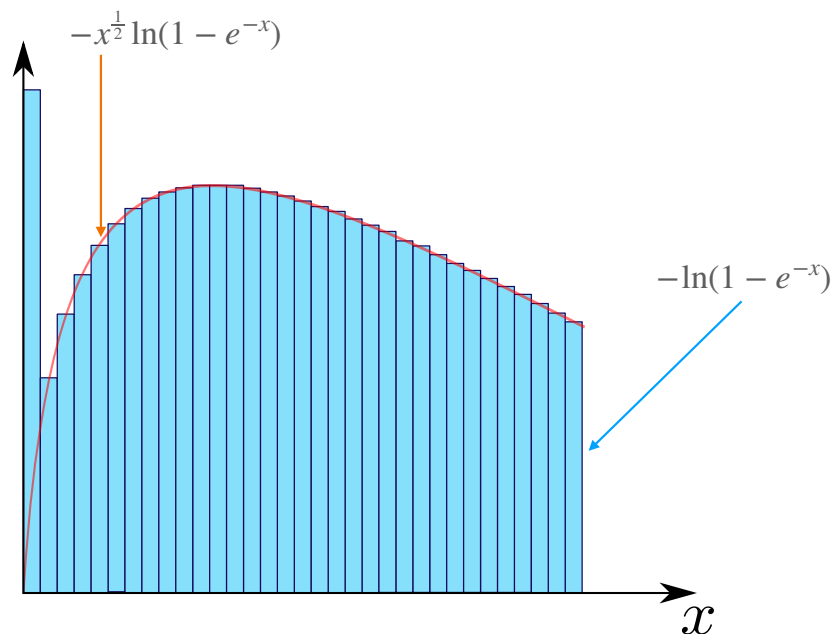
$$0 \leq z < 1. \quad (۶)$$

حال توجه می کنیم که در عبارت (۱) سهم جمله حالت پایه به صورت

$$-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}) = -\ln(1 - z) \quad (۷)$$

است. بنابراین وقتی که z به سمت 1 میل می کند، این جمله به سمت بی نهایت میل خواهد کرد. ببینیم آیا این سهم در انتگرال (؟؟) در نظر گرفته شده است یا خیر؟ اگر به عبارت $x^{\frac{d}{2}-1}$ ، که در واقع نشان دهنده چگالی حالت ها در واحد انرژی است، نگاه کنیم متوجه می شویم که برای $d > 2$ این چگالی به سمت صفر و در نتیجه جمله $x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - e^{-x})$ نیز به سمت صفر میل می کند و در نتیجه روشن است که عبارت واقعی (۱) با انتگرال (؟؟) در این نقطه تفاوت فاحشی دارد. دلیل این امر هم روشن است. اگر به شکل نگاه کنیم، این تفاوت را می بینیم.

(۲)



شکل ۲: در حد $z \rightarrow 1$ و در بعدهای بالاتر از $d = 2$ جمع (۱) را نمی توان با انتگرال (۵) جایگزین کرد.

عبارت (۱) مجموع ارتفاعات میله هاست، در حالیکه انتگرال (۵) سطح زیر منحنی قرمز رنگ است و واضح است که سهم حالت پایه را در نظر نگرفته است. دلیل این اشتباه این است که تبدیل یک جمع به یک انتگرال فقط وقتی صحیح است که جملات متوالی جمع نسبت به هم تفاوت شان اندک باشد تا بتوان آنها را با یک تابع هموار تقریب زد. اما در این جا سهم حالت پایه با بقیه حالت ها تفاوت بسیار زیادی دارد.

سوال مهمی که در این جا پیش می آید این است که آیا تنها سهم حالت پایه است که در انتگرال (۵) نادیده گرفته شده یا اینکه مثلاً سهم اولین و دومین و سومین حالت برانگیخته نیز از قلم افتاده است؟ برای پاسخ به این سوال بهتر است که سهم اولین حالت برانگیخته را با سهم حالت پایه مقایسه کنیم. انرژی حالت پایه را با ϵ_0 و انرژی حالت اولین حالت برانگیخته را با ϵ_1 نشان می دهیم. روشن است که

$$\epsilon_1 - \epsilon_0 \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}. \quad (۸)$$

حال سهم این دو جمله در Q برابر است با:

$$-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}) - (-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_1})). \quad (۹)$$

از درس های قبلی دیده ایم که محدوده مجاز z برابر است با $[0, e^{\beta\epsilon_0}]$ یعنی: $0 \leq z \leq e^{\beta\epsilon_0}$ بنابراین بیشترین مقداری که سهم اولین حالت برانگیخته، یعنی جمله دوم، می تواند اختیار کند برابر است با:

$$-\ln(1 - e^{\beta(\epsilon_0 - \epsilon_1)}) \approx -\ln(\beta(\epsilon_1 - \epsilon_0)) \approx \ln - \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \beta \right). \quad (۱۰)$$

حتی اگر عدد داخل پرانتز به کوچکی 10^{-100} یا 10^{-200} باشد، باز لگاریتم آن عددی در حدود ۱۰۰ یا ۲۰۰ است. این در حالی است که جمله اول در حد $e^{\beta\epsilon_0} \rightarrow z$ به سمت بی نهایت میل می کند. بنابراین تصویری که در صفحه قبل نشان داده ایم درست است. یعنی تنها سهم حالت پایه است که می بایست جداگانه در نظر گرفته شود. با این استدلال اکنون روشن است که چگونه می بایست روابط ۱ تا ۳ را برای بوزون ها بنویسیم. (همانطور که گفته شد، برای سادگی انرژی حالت پایه را برابر با صفر می گیریم). بنابراین روابط ۱ تا ۳ به شکل زیر در می آیند:

$$\ln Q = -\ln(1 - z) - \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - ze^{-x}) dx. \quad (۱۱)$$

$$N = \frac{z}{1 - z} + \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}-1} dx}{z^{-1}e^x - 1}. \quad (۱۲)$$

$$\frac{U}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}} dx}{z^{-1}e^x - 1}. \quad (۱۳)$$

دقت کنید که $\frac{z}{1-z}$ تعداد متوسط ذرات در حالت پایه است که آن را با N_0 نشان می دهیم:

$$N_0 = \frac{z}{1-z}. \quad (۱۴)$$

این عدد، یعنی تعداد ذرات در حالت پایه، با نزدیک شدن z به 1 می تواند بدون هیچ حدی بزرگ شود. البته این جمله سهمی در انرژی یعنی در عبارت (۱۳) ندارد، زیرا انرژی حالت پایه را برابر با صفر گرفته ایم. برای ادامه به رابطه زیر توجه می کنیم. می توانیم انتگرال را به صورت جزء به جزء محاسبه کنیم. در نتیجه بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - ze^{-x}) dx &= \frac{1}{\frac{d}{2}} x^{\frac{d}{2}} \ln(1 - ze^{-x}) \Big|_0^\infty \\ &+ \frac{1}{\frac{d}{2}} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}} \frac{1}{z^{-1}e^x - 1} dx. \end{aligned} \quad (۱۵)$$

با توجه به اینکه عبارت اول برابر با صفر است و با تعریف تابع زیر

$$g_n(z) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1}e^x - 1}. \quad (۱۶)$$

بدست می آوریم:

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z), \quad \frac{PV}{kT} = -\ln(1-z) + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z), \quad \frac{U}{kT} = \frac{d}{2} \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z). \quad (۱۷)$$

توابع $g_n(z)$ نیز مثل توابع فرمیونی دارای خاصیت زیر هستند:

$$z \frac{dg_n(z)}{dz} = g_{n-1}(z). \quad (۱۸)$$

اثبات این خاصیت دقیقاً مثل اثباتی است که برای فرمیون ها ارائه کردیم. (به ضمیمه درس مربوط به فرمیون ها نگاه کنید.) اگر به تعریف توابع $g_n(z)$ نگاه کنیم می بینیم با توجه به اینکه $0 \leq z \leq 1$ است، تابع های $g_n(z)$ مثبت هستند. این رابطه همچنین نشان می دهد که این توابع صعودی هستند. همچنین از رابطه (۱۶) معلوم است که $g_n(0) = 0$.

■ تمرین: نشان دهید که

$$g_n(1) = \zeta(n), \quad (19)$$

که در آن ζ تابع زتای ریمان است یعنی

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \dots \quad (20)$$

می دانیم که $\zeta(1) = \infty$ و $\zeta(\frac{3}{2}) = 2.612$.

اگر به رابطه (۱۷) نگاه کنیم متوجه می شویم که $\frac{z}{1-z}$ تعداد متوسط ذرات موجود در حالت پایه و $\frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z)$ تعداد ذرات موجود در تمامی حالت های برانگیخته است. این دو را به ترتیب با N_0 و N_e نمایش می دهیم، یعنی

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z) \equiv N_0 + N_e. \quad (21)$$

حال با توجه به خواصی که در مورد تابع $g_n(z)$ گفتیم، (یعنی اینکه این تابع صعودی است و مقدار آن بین صفر در $z=0$ و یک مقدار ماکزیمم در $z=1$ است)، معلوم می شود که ظرفیت حالات برانگیخته برای جا دادن ذرات محدود است. این ظرفیت برابر است با

$$(N_e)_{max} = \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(1) = \frac{V}{\lambda^d} \zeta(\frac{d}{2}). \quad (22)$$

دقت کنید که این ظرفیت به دما بستگی دارد. بنابراین اگر تعداد کل ذرات موجود در گاز بیش از این مقدار باشد، بقیه ذرات می بایست حتما به حالت پایه بروند. در این حالت می گوییم که ذرات شروع به چگالش در حالت پایه، یا به سادگی شروع به چگالش کرده اند. بنابراین شرط چگالش آن است که

$$N \geq \frac{V}{\lambda^d} \zeta(\frac{d}{2}), \quad (23)$$

و یا

$$n\lambda^d \geq \zeta(\frac{d}{2}). \quad (24)$$

این شرط، شرطی ترکیبی از دما و چگالی است که با توجه به رابطه $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$n(\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}})^d \geq \zeta(\frac{d}{2}). \quad (25)$$

از این رابطه چند درس مهم می گیریم:

■ یک: برای یک گاز بوزونی در بعد $(d = 2)$ چگالش رخ نمی دهد، زیرا $\zeta(1) = \infty$. بنابراین شرط چگالش هرگز محقق نمی شود، مگر در دمای صفر مطلق.

■ دو: ناحیه ای که در آن چگالش رخ می دهد از رابطه (۲۵) تعیین می شود. بنابراین در هر چگالی معینی هر وقت که دما را از یک حد بحرانی T_c کمتر کنیم، چگالش اتفاق می افتد، یا در هر دمای معینی هرگاه چگالی را از یک مقدار بحرانی n_c زیادتر کنیم چگالش آغاز خواهد شد. این دما و این چگالی بحرانی را با استفاده از رابطه چگالش می توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} n_c &= \zeta\left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2\pi mkT}}{h}\right)^d, \\ T_c &= \frac{h^2}{2\pi mk} \left(\frac{n}{\zeta(\frac{d}{2})}\right)^{\frac{2}{d}}. \end{aligned} \quad (۲۶)$$

■ سه: این دو رابطه آخری نشان می دهند که هر چقدر که جرم ذره کمتر باشد، چگالش زودتر اتفاق می افتد. همچنین وجود h در این رابطه نشان از این دارد که این پدیده یک پدیده کوانتومی است.

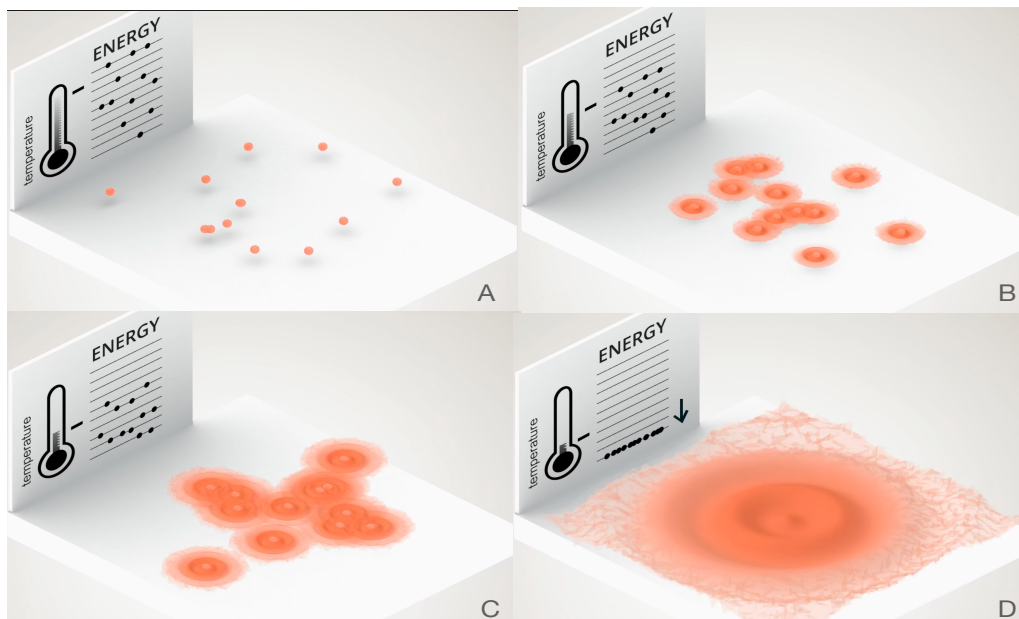
■ یک نکته: اگر به روابط (۱۷) نگاه کنیم، به نظر می رسد که انرژی گاز بوزونی مستقل از تعداد ذرات است و یک مقدار حداکثری و متناهی ای دارد که برابر است با $U_{max} = kT(\frac{d}{2} \frac{V}{\lambda^d})\zeta(\frac{d}{2} + 1)$. در نتیجه به نظر می رسد که هر چه تعداد ذرات را اضافه کنیم به انرژی این گاز چیزی اضافه نمی شود که در نگاه اول عجیب و غریب به نظر می رسد. اما دلیل این امر این است که انرژی حالت پایه را برابر با صفر گرفته ایم و به همین دلیل بعد از چگالش هر چه ذره اضافه می کنیم، این ذرات به حالت پایه می روند و به انرژی سیستم چیزی اضافه نمی شود. اما می توانستیم از همان ابتدا انرژی حالت پایه را برابر با ϵ_0 بگیریم. در این صورت به جای رابطه (۱۱) می داشتیم:

$$\ln Q = -\ln(1 - e^{-\beta\epsilon_0} z) - \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - ze^{-x}) dx. \quad (۲۷)$$

حال اگر همان محاسبات پیشین را ادامه دهیم به جای روابط (۱۷) به روابط زیر می رسیم:

(۲۸)

$$N = N_0(z) + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z), \quad \frac{PV}{kT} = -\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}) + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z), \quad \frac{U}{kT} = \frac{\epsilon_0 N_0(z)}{kT} + \frac{d}{2} \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z).$$



شکل ۳: چهار قاب از یک انیمیشن که چگونگی چگالش بوز-اایشتن را نشان می دهد. برگرفته از ویکیپدیا. در شکل (A) دما بالاست و اتم ها مثل گوی های جدا از هم با سرعت زیاد حرکت می کنند. به تدریج که دما پایین می آید، تابع موج آنها گسترده می شود و سرانجام در شکل (D) وقتی که دما به زیر دمای چگالش می رسد، همه آنها یک تابع موج پیدا می کنند و در واقع در یک حالت کوانتومی قرار می گیرند.

که در آن

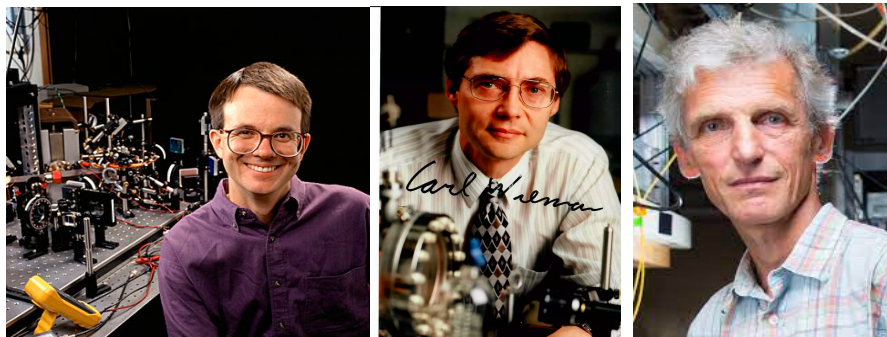
$$N_0(z) := \frac{z}{e^{\beta\epsilon_0} - z}$$

تعداد ذراتی است که در حالت پایه جای گرفته اند. به این ترتیب می بینیم که این بار هر چه z به $e^{\beta\epsilon_0}$ نزدیک تر شود، تعداد ذرات جای

گرفته در حالت پایه، یعنی $N_0(z)$ ، نیز بیشتر شده و انرژی این ذرات یعنی $N_0(z)\epsilon_0$ نیز به صورت نامحدود اضافه خواهد شد.^۴

در بخش بعدی خواص ترمودینامیکی گاز ایده آل را بررسی می کنیم.

^۴ توضیح این نکته را مرهون سوالی می دانم که علی اکبر ربانی نژاد دانشجوی این درس در بهار سال ۱۴۰۳ پرسیده است . به خاطر این سوال و پی گیری اش از او تشکر می کنم.



Eric Cornell

Carl Weiman

Wolfgang Ketterle

شکل ۴: فیزیکدان هایی که اولین بار چگالش بوز-اینشتین را به طور تجربی مشاهده کردند و برای این کار برنده جایزه نوبل سال ۲۰۰۱ شدند. نخستین بار در سال ۱۹۹۵، اریک کرنل و کارل وایمن توانستند یک گاز رقیق از حدود ۲۰۰۰ اتم روییدیم ^{87}Rb را در دمای ۱۷۰ نانوکلوین چگالیده کنند. چهارماه بعد، ولفگانگ کهترل در یک آزمایش مستقل توانست صد برابر این تعداد اتم سدیم ^{23}Na را در دمای میکروکلوین چگالیده کند.

۲ خواص ترمودینامیکی گاز بوزونی ایده آل

برای آنکه ترمودینامیک گاز بوزونی را مطالعه کنیم می بایست دو رژیم متفاوت را از هم تمیز دهیم. یکی وقتی که هنوز چگالش رخ نداده است و دیگری وقتی که چگالش رخ داده است.

۱.۲ بالاتر از دمای چگالش

در این رژیم z هنوز برابر با ۱ نشده است، بنابراین عبارت های $\frac{z}{1-z}$ یا $\ln(1-z)$ را می توان در مقایسه با بقیه جملات دور ریخت و رابطه (۱۷) را به شکل زیر نوشت:

$$n\lambda^d = g_{\frac{d}{2}}(z), \quad \frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z), \quad U = \frac{d}{2} PV. \quad (29)$$

از آنجا که همواره $0 < z < 1$ است می توان $g_n(z)$ را بر حسب توان های z بسط داد.

■ تمرین: نشان دهید که تابع $g_n(z)$ را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$g_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^n}. \quad (30)$$

بنابراین با استفاده از رابطه ی (۲۹) می توانیم بنویسیم:

$$n\lambda^d = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{\frac{d}{2}}}. \quad (۳۱)$$

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{\frac{d}{2}+1}}. \quad (۳۲)$$

سری (۳۱) را می توان وارونه کرد که باعث می شود بتوانیم z را بر حسب توان های متوالی $n\lambda^d$ بنویسیم:

$$z = \sum_{l=1}^{\infty} a_l (n\lambda^d)^l. \quad (۳۳)$$

جایگذاری این سری در رابطه (۳۲) بدست می دهد:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \sum_{l=1}^{\infty} b_l (n\lambda^d)^l \quad (۳۴)$$

و یا

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \sum_{l=1}^{\infty} b_l \left(\frac{N}{V} \lambda^d\right)^l = N \sum_{l=1}^{\infty} b_l \left(\frac{N}{V} \lambda^d\right)^{l-1} \quad (۳۵)$$

و در نتیجه

$$\frac{PV}{kT} = N \left(1 + b_2 \left(\frac{\lambda^d}{v}\right) + b_3 \left(\frac{\lambda^d}{v}\right)^2 + \dots \right), \quad (۳۶)$$

که در آن $v = \frac{V}{N}$ حجم در دسترس هر ذره است. رابطه آخر بسط ویریا برای معادله حالت را بدست می دهد. برای بدست آوردن شکل نهایی بسط ویریا می بایست رتبه به رتبه ضریب های a_l و سپس b_l را بدست آورد. دقت کنید که اگر $\frac{\lambda^d}{v}$ کوچک باشد به معنای این است که طول موج گرمایی نسبت به فاصله میانگین بین ذرات کوچک است و بنابراین آثار کوانتومی اهمیت کمی خواهند داشت. به همین دلیل است که در بسط ویریا بالاً طرف راست بر حسب قوای متوالی این پارامتر، یعنی $\frac{\lambda^d}{v}$ ، نوشته شده است. در حدی که این پارامتر کاملاً قابل صرف نظر کردن باشد، معادله حالت به معادله حالت گاز معمولی یعنی گاز ماکسول - بولتزمن تبدیل می شود. از رابطه بالا مقدار انرژی را نیز می توانیم بدست آوریم:

$$U = \frac{d}{2} PV = \frac{d}{2} NkT \left(1 + b_2 \left(\frac{\lambda^d}{v}\right) + b_3 \left(\frac{\lambda^d}{v}\right)^2 + \dots \right). \quad (۳۷)$$

ظرفیت گرمایی ویژه را نیز می توان از رابطه $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V}$ بدست آورد.

■ مثال: سعی می کنیم ضریب b_2 را برای گاز سه بعدی یعنی برای $d = 3$ بدست بیاوریم. از رابطه (۳۱) داریم:

$$y := n\lambda^3 = z + \frac{z^2}{2\sqrt{2}} + \dots \quad (38)$$

بنابراین قرار می دهیم

$$z = y + ay^2 + \dots$$

این بسط را در دو طرف رابطه قبلی قرار می دهیم:

$$y = (y + ay^2 + \dots) + \frac{1}{2\sqrt{2}} (y^2 + \dots) \quad (39)$$

که از آن نتیجه می گیریم: $a = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$. بنابراین

$$z = y - \frac{1}{2\sqrt{2}} y^2 + \dots \quad (40)$$

حال این مقدار را در رابطه (۳۲) قرار می دهیم و بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{PV}{kT} &= \frac{V}{\lambda^3} \left(z + \frac{z^2}{2\sqrt{2}} + \dots \right) \\ &= \frac{V}{\lambda^3} \left(y - \frac{y^2}{2\sqrt{2}} + \frac{y^2}{4\sqrt{2}} + \dots \right) \\ &= \frac{V}{\lambda^3} \left(y - \frac{1}{4\sqrt{2}} y^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (41)$$

و یا با توجه به اینکه $y = \frac{\lambda^3}{v}$

$$\frac{PV}{kT} = N \left(1 - \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\lambda^3}{v} + \dots \right). \quad (42)$$

بنابراین دیده می شود که فشار گاز کمتر از یک گاز ایده آل معمولی است. این کاهش فشار ناشی از تمایل بوزون ها برای جذب یکدیگر است.

■ تمرین: ظرفیت گرمایی ویژه گاز بوزونی را با استفاده از روابط بالا بدست آورید.

۲.۲ پایین تراز دمای چگالش

چگالش وقتی رخ می دهد که حالت های برانگیخته به اندازه ماکزیمم ظرفیت خود ذره پذیرفته باشند. می دانیم که این ظرفیت ماکزیمم برابر است با

$$N_{max} = \frac{V}{\lambda^d} \zeta\left(\frac{d}{2}\right). \quad (۴۳)$$

در نتیجه بقیه ذرات حتما باید به حالت پایه بروند. اگر تعداد کل ذرات را N و تعداد ذراتی که به حالت پایه می روند را N_0 بگیریم، آنگاه:

$$N_0 = N - N_{max} = N - \frac{V}{\lambda^d} \zeta\left(\frac{d}{2}\right).$$

از آنجا که $N_0 = \frac{z}{1-z}$ ، می توانیم مقدار z را از این جا حساب کنیم:

$$z = \frac{N_0}{N_0 + 1}, \quad (۴۴)$$

که در آن N_0 از رابطه قبلی داده می شود. باید دقت کرد که در جاهایی که حساس نیست و باعث اشتباه اساسی نمی شود، می توان z را مساوی ۱ گرفت. حال می توانیم مقدار z بدست آمده در رابطه بالا را در رابطه (۱۷) قرار دهیم تا معادلات حالت پسا چگالش معین شوند. داریم:

$$\frac{PV}{kT} = -\ln(1-z) + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z). \quad (۴۵)$$

بنابراین با قرار دادن (۴۴) در این رابطه بدست می آوریم:

$$\frac{PV}{kT} = -\ln\left(\frac{1}{N_0 + 1}\right) + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}\left(\frac{N_0}{N_0 + 1}\right), \quad (۴۶)$$

که در آن $N_0 = N - \frac{V}{\lambda^d} \zeta\left(\frac{d}{2}\right)$. درست در ابتدای چگالش، که N_0 مقداری از مرتبه ۱ دارد، نمی توان در عبارت بالا تقریبی به عمل آورد، اما تنها کمی بعد از چگالش، به محض اینکه N_0 از مرتبه 10^2 یا حتی 10^1 می شود، می توان با تقریب خیلی خوب $\frac{N_0}{N_0+1}$ را برابر با ۱ گرفت. در نتیجه رابطه (۴۶) به شکل زیر در می آید:

$$\frac{PV}{kT} = \ln N_0 + \frac{V}{\lambda^d} \zeta\left(\frac{d}{2} + 1\right). \quad (۴۷)$$

حال دقت می کنیم که جمله دوم یک عبارت فزونور و متناسب با V است، بنابراین می توان از جمله اول یعنی $\ln N_0$ نسبت به جمله دوم صرف نظر کرد.

در نتیجه خواهیم داشت:

$$P = kT \frac{1}{\lambda^d} \zeta\left(\frac{d}{2} + 1\right) \quad (48)$$

و یا

$$P = cT^{1+\frac{d}{2}}, \quad (49)$$

که در آن c یک ثابت است.

این رابطه نشان می دهد که فشار پساچگالش مستقل از حجم و در نتیجه تراکم پذیری گاز برابر با صفر است.. درست مثل این است که گاز تبدیل به مایع شده باشد. هم چنین از رابطه $U = \frac{d}{2}PV$ بدست می آوریم:

$$U = \frac{d}{2}cVT^{1+\frac{d}{2}}. \quad (50)$$

از این رابطه ظرفیت گرمایی ویژه به شکل زیر بدست می آید:

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T}_V = \frac{d}{2}\left(1 + \frac{d}{2}\right)cVT^{\frac{d}{2}}. \quad (51)$$

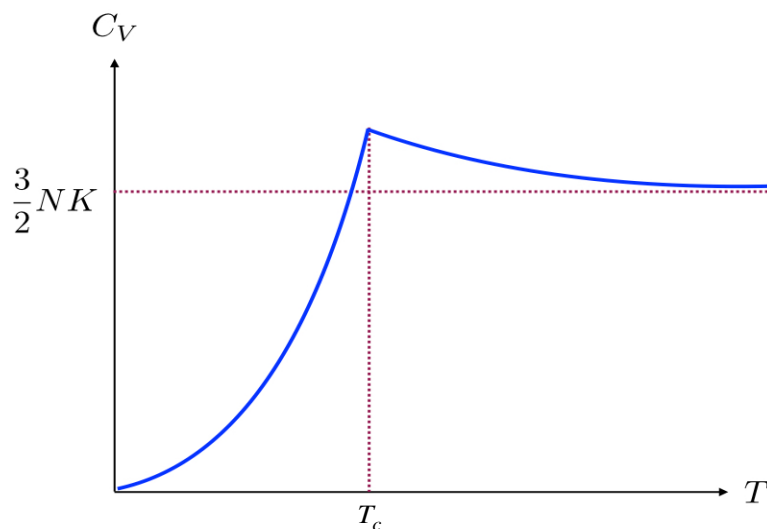
حال اگر این رابطه را با نتایجی که از حل تمرین مربوط به ظرفیت گرمایی ویژه حالت پشاجگالش بدست آوردید، ترکیب کنیم و ظرفیت گرمایی ویژه را بر حسب دما رسم کنیم منحنی کامل ظرفیت گرمایی ویژه بدست می آید، شکل (۵). بقیه خواص ترمودینامیکی گاز بوزونی ایده آل را می توان به همین صورت بدست آورد.

۳ مسئله ها

■ **مسئله اول:** ^۵ یک ذره اسپین یک دوم در میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = B\hat{n}$ قرار دارد. هامیلتونی برهم کنش این ذره برابر است با:

$$H = -\gamma \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (52)$$

^۵این مسئله چندان ارتباطی با مطالب این درسمانه ندارد.



شکل ۵: ظرفیت گرمایی ویژه گاز بوزونی سه بعدی بر حسب دما.

ذره در دمای T به تعادل رسیده است.

الف- ماتریس چگالی این ذره را تعیین کنید.

ب- تابع پارش ذره را بدست آورید.

پ- متوسط انرژی ذره و هم چنین انتروپی آن را مشخص کنید.

■ **مسئله دوم:** برای یک گاز بوزونی ایده آل نشان دهید که:

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_P = - \frac{5}{2T} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}. \quad (53)$$

با استفاده از این رابطه نشان دهید که:

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V} = \frac{(\partial z / \partial T)_P}{(\partial z / \partial T)_V} = \frac{5}{3} \frac{g_{5/2}(z) g_{1/2}(z)}{(g_{3/2}(z))^2} \quad (54)$$

■ **مسئله سوم:** نشان دهید که ضریب تراکم پذیری هم دما و ضریب تراکم پذیری بی در رو برای یک گاز بوزونی ایده آل توسط روابط زیر داده می شوند:

$$\kappa_T = \frac{1}{nkT} \frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \quad \kappa_S = \frac{3}{5nkT} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{5/2}(z)}, \quad (55)$$

که در آن $n = \frac{N}{V}$ چگالی گاز است. سپس نشان دهید که وقتی $z \rightarrow 0$ ، κ_S و κ_T به سمت مقادیر مربوط به گاز کلاسیک میل می کنند، یعنی

$$\kappa_T \rightarrow \frac{1}{P} \quad \kappa_S \rightarrow \frac{1}{\gamma P}.$$

رفتار این کمیت ها را در حدی که گاز خیلی واگن است، یعنی حد $z \rightarrow 1$ بدست آورید.

■ **مسئله چهارم:** سرعت صوت در یک مایع از رابطه زیر حساب می شود:

$$v^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S, \quad (56)$$

که در آن ρ چگالی جرمی گاز است. نشان دهید که سرعت صوت در یک گاز بوزونی برابر است با:

$$v^2 = \frac{5kT}{3m} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} = \frac{5}{9} \langle u^2 \rangle. \quad (57)$$

■ **مسئله پنجم:** یک گاز بوزونی را در آزمایش گرانددکانونیک در نظر بگیرید. افت و خیز تعداد کل ذرات و هم چنین انرژی کل را حساب کنید. این کار را هم در شرایط معمول و هم در شرایطی که گاز به شدت واگن می شود انجام دهید.

■ **قدردانی:** از آقای آرمین یداللهی دانشجوی این درس در سال ۱۴۰۳ که با دقت استثنایی تمامی اشکالات متن اولیه این درسنامه را به من یادآوری کردند تشکر می کنم. آخرین ویرایش این درسنامه را در پاییز سال ۱۴۰۴ دانشجوی درس مکانیک آماری پیشرفته، کیا جمشیدی با دقت فوق العاده ای خواند و اشکالات خارج از شمار آن را برایم مشخص کرد. بیشتر این اشکالات نگارشی بودند اما در چند جا نیز غلط های مفهومی را به من یادآوری کرد. از این بابت خیلی از کیا ممنونم.